Examen de Análisis Complejo

21 de mayo de 1999

1. Integrando la función $z \mapsto \dfrac{z^2 \log(z)}{1+z^4}$ a lo largo de la frontera del conjunto

$$\{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R,\ 0 < \arg(z) < \pi/2\}, \quad (0 < \varepsilon < 1 < R)$$

calcular las integrales

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 \log(x)}{1+x^4}\, dx, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\, dx.$$

2. *a*) Hállese el número de ceros del polinomio $P(z) = z^6 - z^3 - 4z + 6$ en el semiplano de la derecha.

   b) Calcúlese el número de ceros de la función $f(z) = e^z - 4z^7 + 1$ en el disco unidad.

3. Pruébese que, para un conveniente valor de $\alpha > 1$, el dominio

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ |z - \alpha| > 1\}$$

es isomorfo al anillo $A(0;1,2)$. Describir todas las transformaciones de Möbius que aplican Ω sobre $A(0;1,2)$.

4. Sea $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfa verificando $f(0) = 1$ y $|\arg f(z)| < \pi/4$ para todo $z \in D(0,1)$. Pruébese que :

$$|f(z)|^2 \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

Si, además $f'(0) = 1$ entonces:

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{1/2}.$$